Αν A είναι ένα μη κενό σύνολο μία (αλγεβρική) πράξη στο A είναι μία απεικόνιση

$f: A \times A \to A$

Συνήθως, αντί για $f(\alpha,\beta)$ για $(\alpha,\beta) \in A \times A$, γράφουμε $\alpha f \beta$.

Π.χ. για μία πράξη που συμβολίζεται προσθετικά χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\alpha + \beta$ (αντί για $+(\alpha,\beta)$)

ενώ για μία πράξη που συμβολίζεται πολλαπλασιαστικά χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\alpha \cdot \beta$ ή $\alpha\beta$ (αντί για $\cdot(\alpha,\beta)$)

Μία πράξη $*$ σε ένα σύνολο A λέγεται

Προσεταιριστική: αν ισχύει $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ $\forall \alpha,\beta,\gamma \in A$

Αντιμεταθετική : -//- $\alpha * \beta = \beta * \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in A$

Έχει ουδέτερο στοιχείο το $e \in A$: αν $\alpha * e = e * \alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in A$

Αν το A έχει ουδέτερο στοιχείο το e τότε, το α' λέγεται συμμετρικό του α ως προς την * αν $\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e$

Σημείωση: όταν η πράξη συμβολίζεται προσθετικά (σύμβολο +) το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 0, ενώ η πράξη συμβολίζεται πολλαπλασιαστικά (σύμβολο ·) το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 1

Σύνολο των πραγματικών αριθμών - Αξιωματική θεμελίωση

Ορισμός: Ονομάζουμε σύνολο των πραγματικών αριθμών ένα σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις +, ·

$$\left[\begin{array}{ll} + \; \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} & \cdot \; \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y & (x,y) \longmapsto x\cdot y \end{array} \right]$$

κ' μία σχέση < (άρα $< \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$)
ώστε το $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ να είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα, δηλαδή να ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα

(R1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

(R2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(R3) $\exists$ ένα στοιχείο $0\in\mathbb{R}$, ώστε $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

(R4) $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ $\exists \beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha+\beta=\beta+\alpha=0$

(R5) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

(R6) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(R7) $\exists$ ένα στοιχείο $1\in\mathbb{R}$ με $1\neq 0$, ώστε $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

(R8) $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, $\exists \gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha\cdot\gamma=\gamma\cdot\alpha=1$

(R9) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

↳ επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού προς την πρόσθεση

Σημείωση: Τα αξιώματα 1,3,4 μας λένε ότι $(\mathbb{R},+)$ είναι ομάδα.
Τα 1,2,3,4 λένε ότι $(\mathbb{R},+)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.
Τα αξιώματα 1-9 μας λένε ότι $(\mathbb{R},+,\cdot)$ είναι σώμα.

(R10) (Αρχή της τριχοτομίας) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς μία από τις τρεις:

$\alpha<\beta,\ \alpha=\beta,\ \beta<\alpha$

(R11) $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ αν $\alpha<\beta$ κ' $\beta<\gamma$, τότε $\alpha<\gamma$

Σημείωση: Από τα αξιώματα R10, R11 προκύπτει ότι η σχέση $\leq$ που ορίζεται ~~[illegible]~~ ως εξής: $\alpha\leq\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ή $\alpha<\beta$ είναι ολ. διάταξη στο $\mathbb{R}$

(R12) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, αν $\beta < \gamma$, τότε $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$

(R13) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ αν $\beta < \gamma$ κ' $\alpha > 0$, τότε $\alpha\beta < \alpha\gamma$.

(R14) [Αξίωμα της πληρότητας]

κάθε μη κενό κ' άνω φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}, \leq)$ έχει supremum